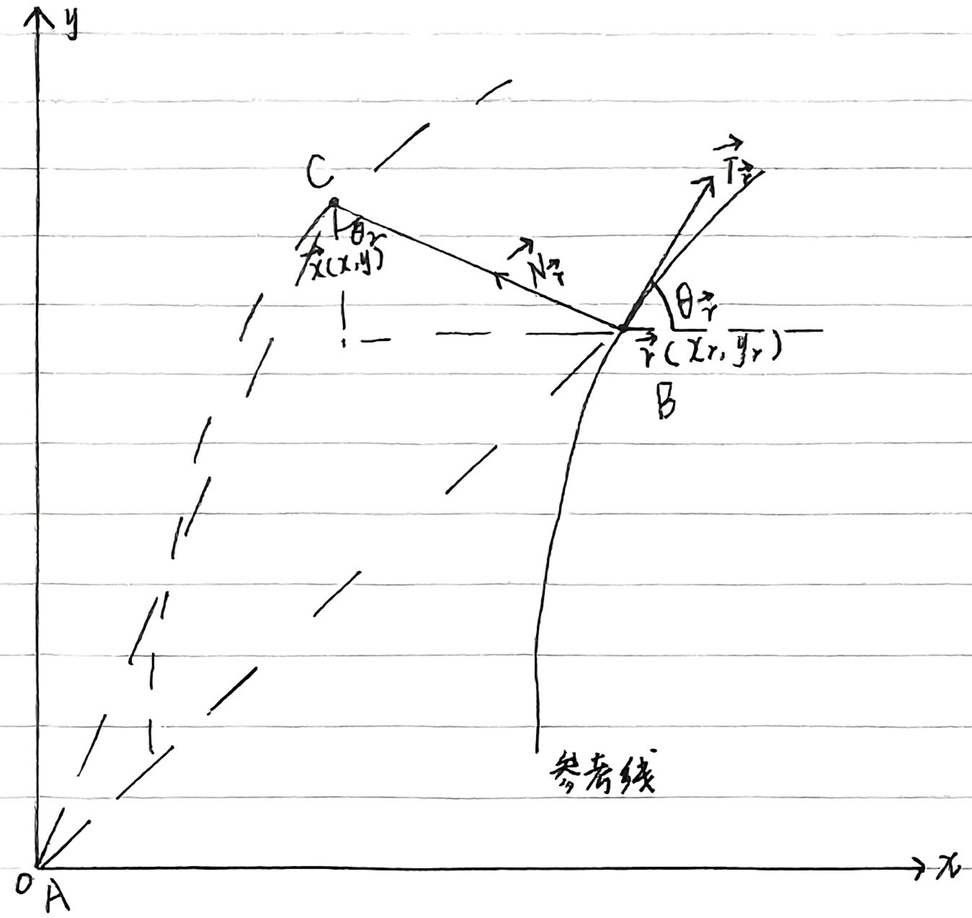


$\vec{x}$：从原点O到(x,y)的向量

$\vec{r}$：从原点O到(x_r,y_r)的向量

$\vec{N_r}$：(x_r,y_r)点~~切线~~切向量$\vec{T_r}$的法向量，是一个单位向量

l：是点(x,y)到(x_r,y_r)的长度

由图可知 $\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{BC}$ 则 $\vec{x}-\vec{r}=l\vec{N_r}$ （l：表示$\vec{BC}$长度，$\vec{N_r}$表示$\vec{BC}$方向）

∵找的是距离C点最近的点，而C点在参考线上的投影点距离C点最近，∴B点是C点在参考线上的投影点

进入正题

1、笛卡尔下的x,y转化成S-L下的s,l

① s：参考点的s即为车辆的s　　一般从参考线提供类获取

② l的大小

$$l=\sqrt{(x-x_r)^2+(y-y_r)^2}$$

l的方向

一般沿着参考线 s 增加方向的左边为正，右边为负

推导 l的方向

$\vec{T_r}$ 是点 (x_r, y_r) 的切向量，也是单位向量

θ_r 是 (x_r, y_r) 的航向角，与 Cartesian 坐标下与 x 轴夹角

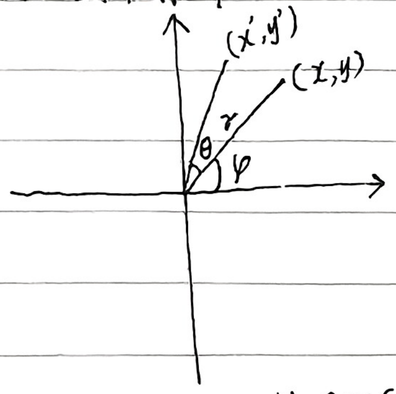
$\vec{N_r}$ 是 $\vec{T_r}$ 法向量 可以由 $\vec{T_r}$ 逆时针旋转 $90°$ 得到

以 (x_r, y_r) 为坐标原点

$\vec{T_r} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r \\ \sin\theta_r \end{bmatrix}$ 这里 $\|\vec{T_r}\|_2$，长度为 1，因为是单位向量

根据旋转矩阵 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，得逆时针旋转 $90°$ 法向量 N_r

旋转矩阵推导



(x, y) 旋转 θ 角度后得到新点 (x', y')

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\varphi+\theta) \\ y' = r\sin(\varphi+\theta) \end{cases}$$

$$\because \cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\theta - \sin\varphi\sin\theta$$

$$\sin(\varphi+\theta) = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta$$

$$x' = r(\cos\varphi \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\theta - \sin\varphi\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = y\cos\theta + x\sin\theta$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{旋转矩阵}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

回到正题

$\vec{N_r}$ 是由 $\vec{T_r}$ 逆时针旋转90°所得

$$\vec{N_r} = \begin{bmatrix}\cos 90 & -\sin 90\\ \sin 90 & \cos 90\end{bmatrix}\vec{T_r} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_r\\ \sin\theta_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sin\theta_r\\ \cos\theta_r\end{bmatrix}$$

∵ $\vec{T_r}$ 和 $\vec{N_r}$ 是正交的单位向量

∴ $\vec{T_r}\times\vec{N_r} = \cancel{\begin{bmatrix}\cos\theta_r\\ \sin\theta_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin\theta_r\\ \cos\theta_r\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}\cos\theta_r\\ \sin\theta_r\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\sin\theta_r\\ \cos\theta_r\end{bmatrix} = \cos^2\theta_r - \sin\theta_r(-\sin\theta_r)$

$= 1$

说明：二维叉乘

$\vec{a} = (a_x, a_y)$ ，$\vec{b} = (b_x, b_y)$

叉乘公式

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_y - a_y b_x$$

∵ $\vec{l}$ 方向与 $\vec{N_r}$ 同向，可通过 $\vec{T_r}$ 和 $\vec{l}$ 叉积正与负来判断 $\vec{l}$ 的方向

$$\vec{l} \overset{\times}{\cancel{乘}} \vec{T_r} = (x - x_r, y - y_r) \times (\cos\theta_r, \sin\theta_r)$$

$$= (x - x_r)\sin\theta_r - (y - y_r)\cos\theta_r$$

如果 $\vec{l}\times\vec{T_r} > 0$，则车辆在参考线左侧，否则在右侧

∴ $\vec{l} = \mathrm{sign}\left((x - x_r)\sin\theta_r - (y - y_r)\cos\theta_r\right)\sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$

至此，s，l 就求完了

2、笛卡尔的 $x, y, \theta_x, k_x, v, a$ 转化成 S-L 下的 $s, \dot{s}, \ddot{s}, l, l', l''$

$\cancel{∵ \vec{x} = \vec{r} + l\vec{N_r}}$

$\cancel{l\vec{N_r} = \vec{x} - \vec{r}}$

~~两边点乘~~ $\cancel{\vec{N_r}^T l \vec{N_r} = \vec{N_r}^T(\vec{x} - \vec{r})}$

$\cancel{l\vec{N_r}^T\vec{N_r} = \vec{x} - \vec{r}}$

$\because \vec{x} = \vec{r} + l\vec{N_r}$

$$l\vec{N_r} = \vec{x} - \vec{r}$$

两边同时 $\vec{N_r}^T$（点乘）

$$\vec{N_r}^T l\vec{N_r} = \vec{N_r}^T(\vec{x} - \vec{r})$$

$$l\vec{N_r}^T\vec{N_r} = \vec{N_r}^T(\vec{x} - \vec{r})$$

$$l = \vec{N_r}^T(\vec{x} - \vec{r})$$ 由单位向量性质

$$l = (\vec{x} - \vec{r})^T\vec{N_r}$$ $\vec{N_r}^T\vec{N_r} = \|\vec{N_r}\|^2 = 1$

点积满足 $a^Tb = b^Ta$

这样就可以得 $\dot{l}$，对 l 对时间求导

$$\dot{l} = (\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{r}})^T\vec{N_r} + \dot{\vec{N_r}}(\vec{x} - \vec{r})^T = (\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{r}})^T\vec{N_r} + (l\vec{N_r})^T\dot{\vec{N_r}} \quad (2)$$

对式中的各项进行计算

$$\dot{\vec{x}} = v\vec{T_x} \rightarrow \text{速度方向} \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{s}\vec{T_r} \quad (3)$$

速度大小

$$\dot{\vec{N_r}} = \frac{d\vec{N_r}}{dt} = \frac{d\vec{N_r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\vec{N_r}}{ds} = -k\dot{s}\vec{T_r} \quad (4)$$

推导 $\frac{d\vec{N_r}}{ds} = -k\vec{T_r}$

前面已经推导过

$$\vec{N_r} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_r \\ \cos\theta_r \end{bmatrix} \qquad \vec{T_r} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r \\ \sin\theta_r \end{bmatrix}$$

$\vec{N_r}$ 对弧长 S 求导

$$\frac{d\vec{N_r}}{ds} = \frac{d}{ds}\begin{bmatrix} -\sin\theta_r \\ \cos\theta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_r \cdot \frac{d\theta_r}{ds} \\ -\sin\theta_r \cdot \frac{d\theta_r}{ds} \end{bmatrix} = \cancel{\frac{d\theta_r}{ds}} -\frac{d\theta_r}{ds}\vec{T_r}$$

$\frac{d\theta_r}{ds}$ 为曲率 k， $\therefore \frac{d\vec{N_r}}{ds} = \cancel{k\vec{N_r}} - k\vec{T_r}$ $\quad \therefore \dot{\vec{N_r}} = \cancel{k\dot{s}\vec{N_r}} - k\dot{s}\vec{T_r}$

将(3),(4)代入(2)可得

$$\dot{l} = (v\vec{T_x} - \dot{s}\vec{T_r})^T\vec{N_r} - (l\vec{N_r})^T k\dot{s}\vec{T_r}$$

推导

分配律,对于向量或矩阵 A, B, C 有

$$(A+B)^T C = A^T C + B^T C$$

$$\therefore (v\vec{T_x} - \dot{s}\vec{T_r})^T\vec{N_r} = (v\vec{T_x})^T\vec{N_r} - (\dot{s}\vec{T_r})^T\vec{N_r}$$

$$= v\vec{T_x}^T\vec{N_r} - \dot{s}\vec{T_r}^T\vec{N_r}$$

$$(l\vec{N_r})^T k\dot{s}\vec{T_r} = lk\dot{s}\cdot\vec{N_r}^T\vec{T_r}$$

$\because$ $\vec{T_r}$ 和 $\vec{N_r}$ 是正交的 $\therefore$ 点积为0

又$\because$ 正交性的对称性 $\vec{T_r}^T\vec{N_r} = \vec{N_r}^T\vec{T_r} = 0$

$$\vec{T_r}\cdot\vec{N_r} = \vec{T_r}^T\vec{N_r} = \vec{N_r}^T\vec{T_r} = 0$$

$$\therefore \dot{l} = v\vec{T_x}^T\vec{N_r}$$

将 $\vec{T_x}$ 和 $\vec{N_r}$ 的坐标代入

$$\dot{l} = v\begin{bmatrix}\cos\theta_x & \sin\theta_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin\theta_r \\ \cos\theta_r\end{bmatrix}$$

$$= v(\sin\theta_x\cos\theta_r - \sin\theta_r\cos\theta_x)$$

$$= v\sin(\theta_x - \theta_r) \qquad (5)$$

到这将 $\dot{l}$ 和 v 关联起来了

然后,将 $\vec{x} = \vec{r} + l\vec{N_r}$ 对时间求导,这里 l 表示一个表达式,而非长度大小

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d(\vec{r} + l\vec{N_r})}{dt} = \dot{\vec{r}} + \dot{l}\vec{N_r} + l\dot{\vec{N_r}}$$

将式(3),(4)带入 $\dot{\vec{x}} = \dot{s}\vec{T_r} + \dot{l}\vec{N_r} - lk\dot{s}\vec{T_r}$

$$= \dot{s}(1-kl)\vec{T_r} + \dot{l}\vec{N_r} \quad (k\text{是参考线曲率})$$

由于 $\vec{T}_r$ 和 $\vec{N}_r$ 正交，对两边~~平方，再开根号~~取模

$$\|\dot{\vec{x}}\| = \sqrt{\|\dot{s}(1-kl)\vec{T}_r\|^2 + \|\dot{l}\vec{N}_r\|^2}$$

$$= \sqrt{[\dot{s}(1-kl)]^2 + \dot{l}^2}$$

$$v = \sqrt{\dot{s}^2(1-kl)^2 + \dot{l}^2} \qquad (6)$$

$v = \|\dot{\vec{x}}\|$ 表示速度的大小，默认不会出现负速度

将式(6)和(5)综合起来，把速度 v 约掉

将式(5)平方

$$\dot{l}^2 = v^2 \sin^2(\theta_x - \theta_r) \qquad (A)$$

将式(6)平方 $\quad v^2 = \dot{s}^2(1-kl)^2 + \dot{l}^2 \qquad (B)$

将式(B)代入式(A)

$$\dot{l}^2 = \dot{s}^2(1-kl)^2\sin^2(\theta_x - \theta_r) + \dot{l}^2\sin^2(\theta_x - \theta_r)$$

$$\dot{l}^2\cos^2(\theta_x - \theta_r) = \dot{s}^2(1-kl)^2\sin^2(\theta_x - \theta_r)$$

$$\left(\frac{\dot{l}}{\dot{s}}\right)^2 = \tan^2(\theta_x - \theta_r)(1-kl)^2 = l'^2$$

一般认为参考线曲率远远小于车辆的转弯极限（0.2m左右），车辆偏离参考线不会太远（小于车道宽即4m左右），因此可以认为 $1-kl>0$，并且假设车辆与参考线的方向偏差不会超过 $\frac{\pi}{2}$ 即 $|\theta_x - \theta_r| < \frac{\pi}{2}$，$l'$ 符号与 $\theta_x - \theta_r$ 符号相同，于是可以得出 l' 的表达式

$$l' = \tan(\theta_x - \theta_r)(1-kl) \qquad (7)$$

然后由式(5)(7)和 $l' = \frac{\dot{l}}{\dot{s}}$ 可得

$$\cancel{\tan(\theta_x - \theta_r) =} \frac{v\sin(\theta_x - \theta_r)}{}$$

$$\tan(\theta_x - \theta_r)(1-kl) = \frac{v\sin(\theta_x - \theta_r)}{\dot{s}}$$

$$\dot{s} = \frac{v}{1-kl}\cos(\theta_x - \theta_r) \qquad (8)$$

然后求 l''，$l''=\frac{dl'}{ds}$，由于 $k=\frac{d\theta}{ds}$，设笛卡尔坐标下弧长为 s_x

S-L坐标系对S的微分则为

$$\frac{d}{ds}=\frac{ds_x}{ds}\cdot\frac{d}{ds_x} \quad \text{由于 } v=\frac{ds_x}{dt}，\therefore \frac{\frac{ds_x}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\cdot\frac{d}{ds_x}=\frac{v}{\dot{s}}\frac{d}{ds_x}$$

将式(8)代入得 $\frac{1-kl}{\cos(\theta_x-\theta_r)}\cdot\frac{d}{ds_x}$ (9)

根据式(7) $l''=\frac{dl'}{ds}=\frac{d\tan(\theta_x-\theta_r)(1-kl)}{ds}$

$$\cancel{=\frac{d(1-kl)}{ds}\tan(\theta_x-\theta_r)+}$$

$$=\underbrace{\frac{d\tan(\theta_x-\theta_r)}{ds}}_{=\sec^2(\theta_x-\theta_r)\underbrace{\frac{d(\theta_x-\theta_r)}{ds}}_{=\frac{d\theta_x}{ds}-\frac{d\theta_r}{ds}}}(1-kl)+\underbrace{\frac{d(1-kl)}{ds}}_{=-\frac{d(kl)}{ds}=-(\frac{dk}{ds}l+l'k)}\tan(\theta_x-\theta_r)$$

$$=\frac{1-kl}{\cos(\theta_x-\theta_r)}\underbrace{\frac{d\theta_x}{ds_x}}_{k_x}-\underbrace{\frac{d\theta_r}{ds}}_{k_r}$$

$$\underline{l''=-(\frac{dk}{ds}l+kl')\tan(\theta_x-\theta_r)+\frac{1-kl}{\cos^2(\theta_x-\theta_r)}\left(k_x\frac{1-kl}{\cos(\theta_x-\theta_r)}-k_r\right)} \quad (11)$$

再求 $\dot{s}$，利用式(8)将v提出来，对时间微分可得

$$v=\frac{\dot{s}(1-kl)}{\cos(\theta_x-\theta_r)}$$

$$a=\ddot{s}\frac{1-kl}{\cos(\theta_x-\theta_r)}+\dot{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{1-kl}{\cos\Delta\theta}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1-kl}{\cos\Delta\theta}\right)=\frac{d(1-kl)}{dt}\cdot\frac{1}{\cos\Delta\theta}+(1-kl)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\Delta\theta}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(1-kl)=-\frac{d(kl)}{dt}=-\left(\frac{dk}{dt}l+\frac{dl}{dt}k\right)$$

$$\frac{dk}{dt}=\frac{dk}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=dk\cdot\dot{s}$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=l'\cdot\dot{s}$$

$$\therefore\frac{d}{dt}(1-kl)=-\dot{s}(dkl+kl')$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\Delta\theta}\right)=\frac{d}{d\Delta\theta}\left(\frac{1}{\cos\Delta\theta}\right)\cdot\frac{d\Delta\theta}{dt}=\frac{\sin\Delta\theta}{\cos^2\Delta\theta}\cdot\frac{d\Delta\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$=\frac{\tan\Delta\theta}{\cos\Delta\theta}\cdot\frac{d\Delta\theta}{ds}\cdot\dot{s}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1-kl}{\cos\Delta\theta}\right)=-\dot{s}(dkl+kl')\cdot\frac{1}{\cos\Delta\theta}+(1-kl)\frac{\tan\Delta\theta}{\cos\Delta\theta}\cdot\frac{d\Delta\theta}{ds}\cdot\dot{s}$$

$$=\frac{\dot{s}}{\cos\Delta\theta}\left((1-kl)\tan\Delta\theta\frac{d\Delta\theta}{ds}-dkl-kl'\right)$$

$$a=\ddot{s}\cdot\frac{1-kl}{\cos\Delta\theta}+\dot{s}\cdot\frac{\dot{s}}{\cos\Delta\theta}\left((1-kl)\tan\Delta\theta\frac{d\Delta\theta}{ds}-dkl-kl'\right)$$

$$=\frac{1-kl}{\cos\Delta\theta}\ddot{s}+\frac{\dot{s}^2}{\cos\theta}\left((1-kl)\tan\Delta\theta\frac{d\Delta\theta}{ds}-dkl-kl'\right)\quad(12)$$

3. S-L下的 s, $\dot{s}$, $\ddot{s}$, l, l', l'' 转化成笛卡尔下的 x, y, θ_x, k_x, V, a

需要在参考线上找到对应 S 的参考点记为 $x_r, y_r, \theta_r, k_r, dk_r$

由于车辆与参考点的连线垂直于切线方向

$$x = x_r - l\sin\theta_r$$
$$y = y_r + l\cos\theta_r$$

由式(7)可以求得

$$\theta_x = \arctan2(l', 1-k_r l) + \theta_r$$

由式6可求速度 v，由式11可求 k_x，由式12可求 a