

1. 向量及线性运算

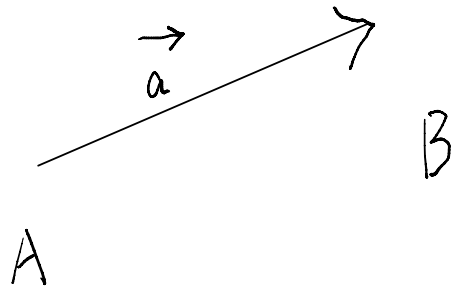
一. 定义

1. 向量 — 有大小有方向的量
(矢量)

Note: 向量由大小(长度)及方向唯一确定, 与起点无关, 与位置无关, 只由长度和方向确定的向量称为自由向量

2. 向量相等

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为两个向量, 当 $\vec{a}, \vec{b}$ 方向相同, 且长度相等称 $\vec{a}, \vec{b}$ 相等记 $\vec{a} = \vec{b}$



$\vec{AB}$: 代表以 A 为起点, B 为终点, 指向 B 点的向量

3. 向量的模, 向量夹角

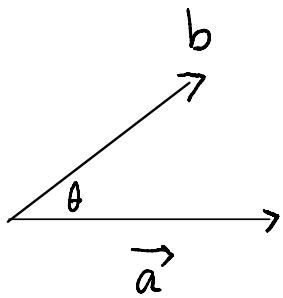
① 设 $\vec{a}$ 为一个向量, 其长度记为 $|\vec{a}|$

如果 $|\vec{a}|=0$ 称 $\vec{a}$ 为零向量 记 $\vec{a}=\vec{0}$

(零向量的方向不确定的)

如果 $|\vec{a}|=1$ 称 $\vec{a}$ 为单位向量

② $\vec{a}, \vec{b}$ 为两个向量

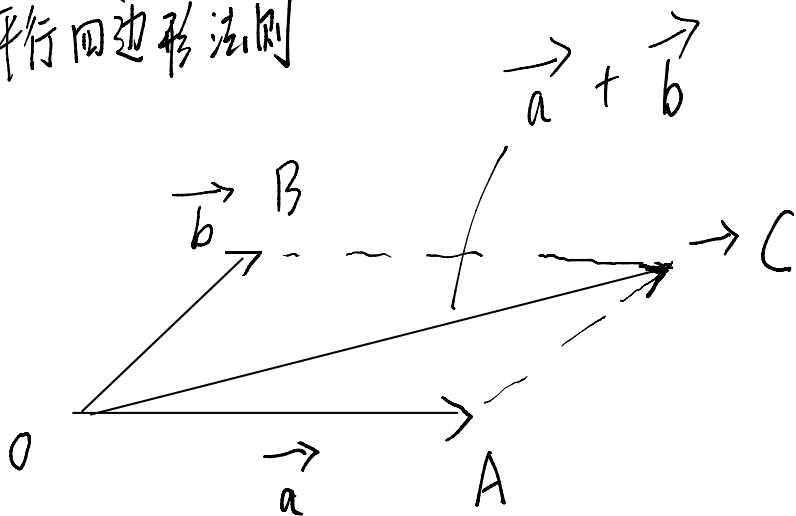


$\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为 θ , 记 $(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$

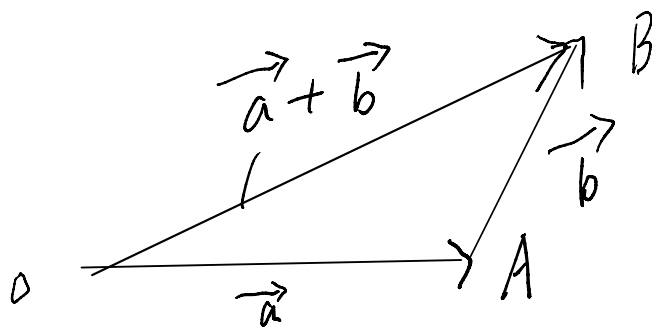
二. 向量的线性运算

1. $\vec{a} + \vec{b}$

① 平行四边形法则



② 三角形法则

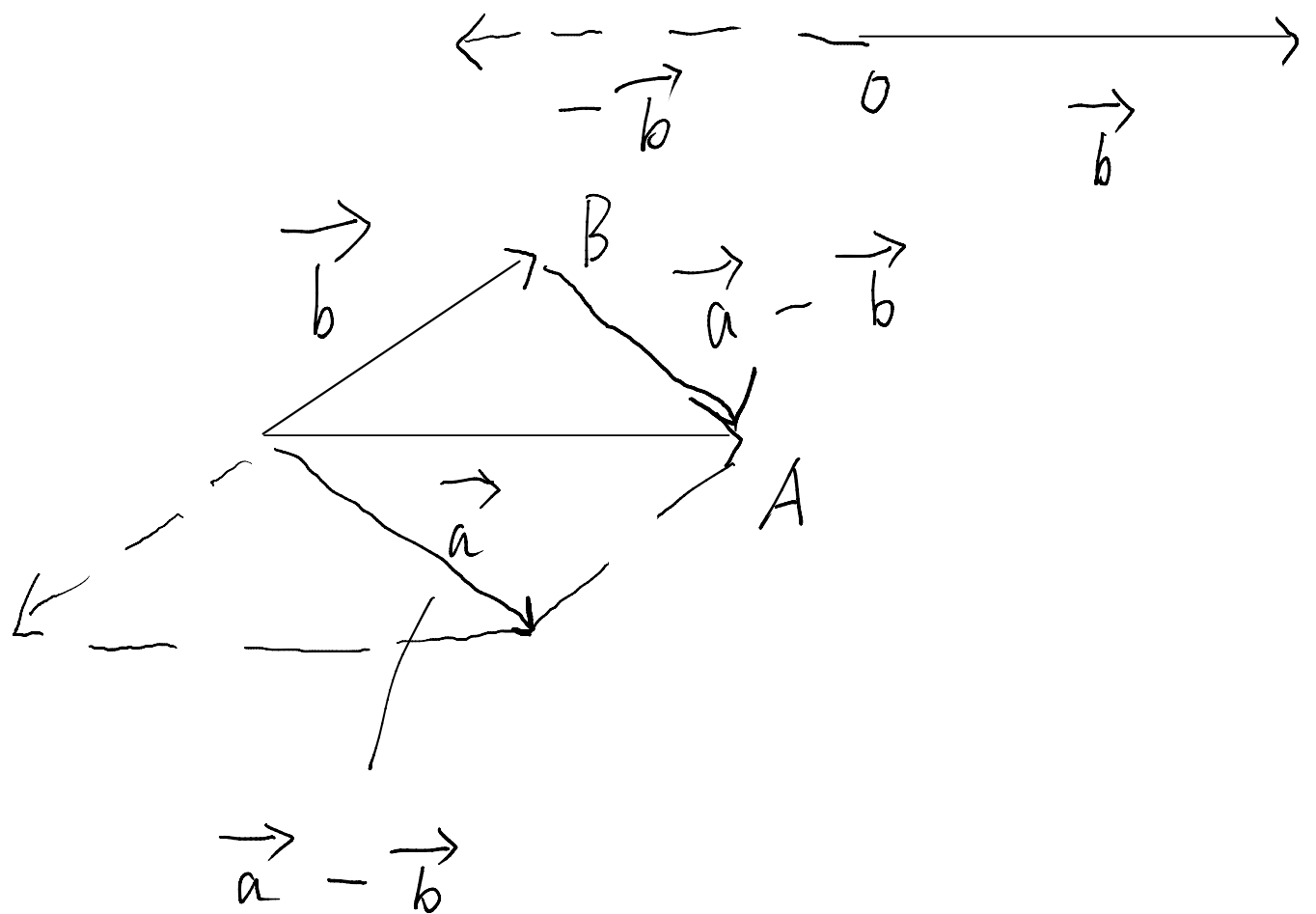


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

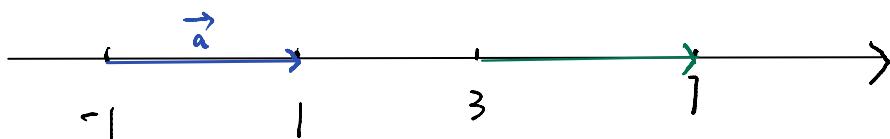
$$2. \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

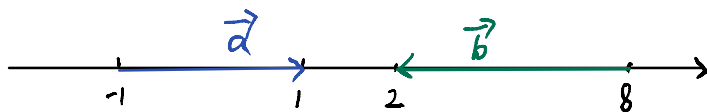


将 $\vec{a}, \vec{b}$ 起点相同从 $\vec{b}$ 的终点指向 $\vec{a}$ 终点的
向量即 $\vec{a} - \vec{b}$

3. 数与向量的乘法



$$\vec{b} = 2\vec{a}$$



$$\vec{b} = -3\vec{a}$$

$k\vec{a}$: (k 为常数)

① $k > 0$

$k\vec{a}$ 方向与 $\vec{a}$ 相同, 长度为 $\vec{a}$ 的 k 倍

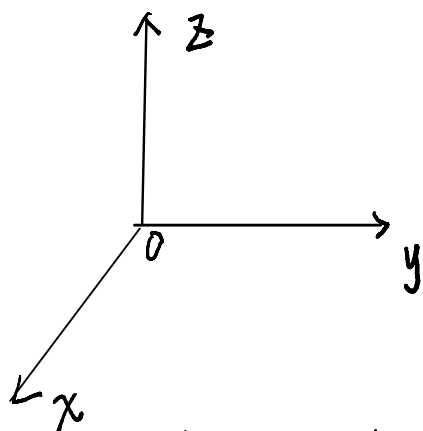
② $k = 0$

$$k\vec{a} = \vec{0}$$

③ $k < 0$

$k\vec{a}$ 方向与 $\vec{a}$ 反向 长度为 $\vec{a}$ 的 $|k|$ 倍

三. 空间直角坐标系



x, y, z 轴正向形成的卦限为第 I 卦限

$$\text{第 I 卦限} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\text{第 III 卦限} \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\text{第 II 卦限} \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\text{第 IV 卦限} \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\text{第VI卦限} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z < 0 \end{cases} \quad \text{第VII卦限} \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ z < 0 \end{cases}$$

$$\text{第VIII卦限} \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ z < 0 \end{cases} \quad \text{第IX卦限} \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ z < 0 \end{cases}$$

四. 向量线性运算的代数描述

$$\text{设 } \vec{a} = \{a_1, b_1, c_1\}, \vec{b} = \{a_2, b_2, c_2\}$$

$$1. \vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2\}$$

$$2. \vec{a} - \vec{b} = \{a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2\}$$

$$3. k\vec{a} = \{ka_1, kb_1, kc_1\}$$

五. 向量的模, 方向角与方向余弦、投影

1. 向量的模

$$\text{设 } \vec{a} = \{a_1, b_1, c_1\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$A, B \text{ 两点之间的距离为 } d = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2. 方向角与方向余弦

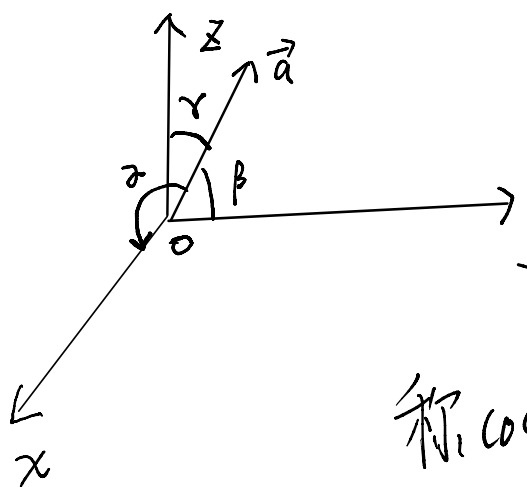
设 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 与 $\vec{a}$ 方向相同, 长度为 1 的向量即 $\vec{a}$ 对应的单位向量记 $\vec{a}^0$.

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

$$\text{设 } \vec{a} = \{a_1, b_1, c_1\}$$

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \{a_1, b_1, c_1\}$$

$$= \left\{ \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \right\}$$



设 $\vec{a}$ 为向量 ($\vec{a} \neq \vec{0}$)

$\vec{a}$ 与 x, y, z 轴正方向的夹角称为 $\vec{a}$ 的方向角记 α, β, γ

称 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 $\vec{a}$ 方向余弦

$$\text{设 } \vec{a} = \{a_1, b_1, c_1\}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{b_1}{|\vec{a}|} = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

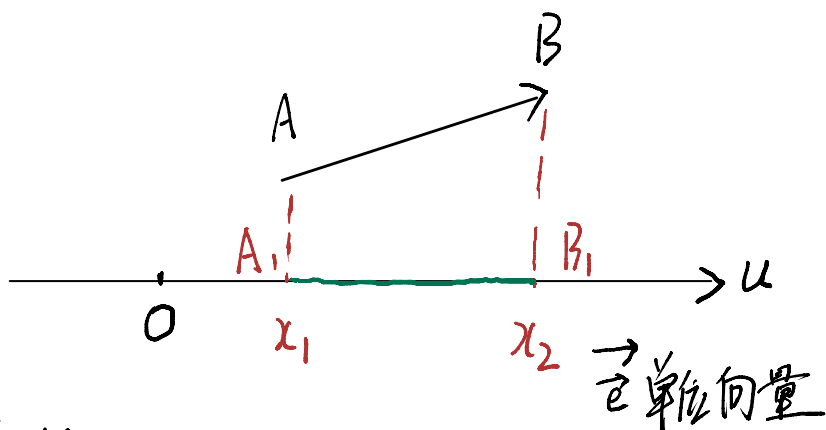
$$\cos r = \frac{c_1}{|\vec{a}|} = \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos r\} = \vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

$$\textcircled{1} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 r = 1$$

$$\textcircled{2} \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos r\} = \vec{a}^0$$

3. 向量在坐标轴上的投影



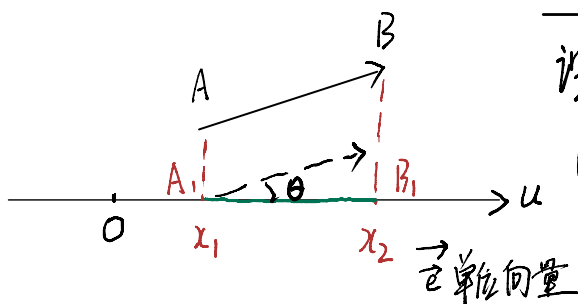
① $\overrightarrow{A_1B_1}$ 称为 $\vec{AB}$ 在 u 轴上投影向量

$$\overrightarrow{A_1B_1} = (x_2 - x_1) \vec{e}$$

② $A_1B_1 = x_2 - x_1$, 向量 $\vec{AB}$ 在 u 轴上的投影

记 $\text{prj}_u \vec{AB}$ 即 $\text{prj}_u \vec{AB} = x_2 - x_1$

③



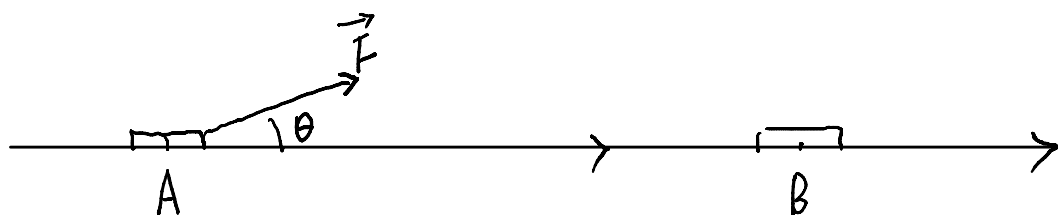
设 $\vec{AB}$ 与 u 轴夹角为 θ

$$\text{则 } \text{prj}_u \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \cos \theta$$

2. 向量的数量积与向量积

一. 向量的数量积 (参与运算的是向量 结果为数)

(一) 产生的背景: 做功



$$W = |\vec{F}| \cdot \cos\theta \cdot |\vec{AB}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\angle \vec{AB}, \vec{F})$$

记为: $\vec{F} \cdot \vec{AB}$

(二) 向量的数量积定义

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为向量, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} \triangleq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$

称为向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积 (内积)

(三) 性质

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

若 $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$$3. \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

(四) 向量数量积的代数描述

$$\begin{aligned} \text{设 } \vec{a} &= \{a_1, b_1, c_1\}, \vec{b} = \{a_2, b_2, c_2\} \\ &= a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k} \quad = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k} \end{aligned}$$

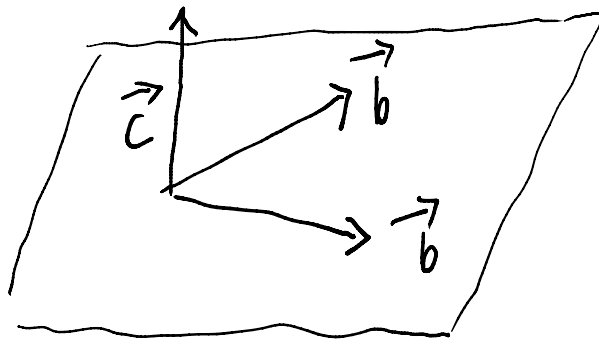
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \cdot (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}) \\ &= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} : \begin{cases} \text{几何: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ \text{代数: } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \end{cases}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

二. 向量的向量积 (参与运算的是向量, 结果还是向量)

(一) 产生背景: 法向量



(二) 向量的向量积定义

1. 几何刻画: $\vec{a}, \vec{b}$ 为向量, $\vec{a} \times \vec{b}$ 称为 $\vec{a}, \vec{b}$ 的 向量积 (外积)

$$\vec{a} \times \vec{b} \begin{cases} \text{方向: 右手准则} \\ \text{大小: } |\vec{a} \times \vec{b}| \\ \quad \triangleq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) \end{cases}$$

人为规定



四指方向与 $\vec{a}$ 方向相同
 四指从 $\vec{a}$ 方向转向 $\vec{b}$ 方向
 大拇指方向为法向量方向
 也就是 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向

Notes:

$$\textcircled{1} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\text{证: } \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0 \\ \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{设 } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$$

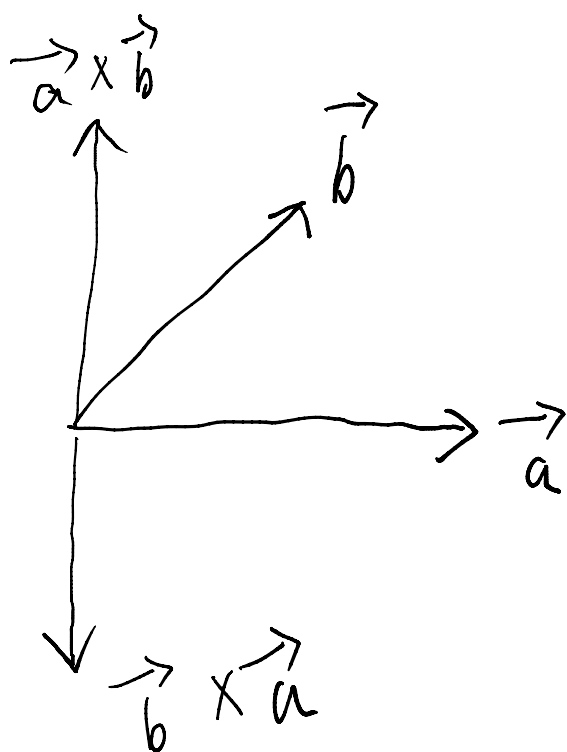
$$\Rightarrow |\vec{a}| = 0 \text{ 或 } |\vec{b}| = 0 \text{ 或 } \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ 或 } \vec{b} = \vec{0} \text{ 或 } (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \text{ 或 } \pi$$

$$\Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

$$\textcircled{3} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

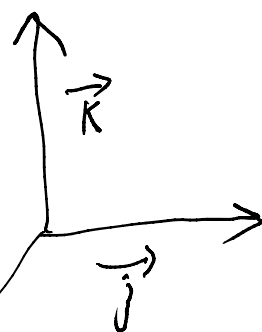


④

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$



2. $\vec{a} \times \vec{b}$ 代数计算

$$\vec{a} = \{a_1, b_1, c_1\} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$$

$$\vec{b} = \{a_2, b_2, c_2\} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}) \times (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k})$$

$$= a_1 a_2 \vec{i} \times \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \times \vec{j} + a_1 c_2 \vec{i} \times \vec{k}$$

$$+ b_1 a_2 \vec{j} \times \vec{i} + b_1 b_2 \vec{j} \times \vec{j} + b_1 c_2 \vec{j} \times \vec{k}$$

$$+ c_1 a_2 \vec{k} \times \vec{i} + c_1 b_2 \vec{k} \times \vec{j} + c_1 c_2 \vec{k} \times \vec{k}$$

$$= a_1 b_2 \vec{k} - a_1 c_2 \vec{j} - a_2 b_1 \vec{k} + b_1 c_2 \vec{i} + a_2 c_1 \vec{j} - c_1 b_2 \vec{i}$$

$$= (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{i} + (a_2 c_1 - a_1 c_2) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

$$= \underline{\{b_1 c_2 - b_2 c_1, a_2 c_1 - a_1 c_2, a_1 b_2 - a_2 b_1\}}$$

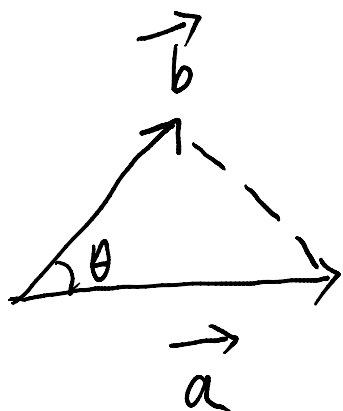
记

$$\vec{a} \times \vec{b} \triangleq \{b_1 c_2 - b_2 c_1, a_2 c_1 - a_1 c_2, a_1 b_2 - a_2 b_1\}$$

$$\begin{array}{cc|cc|cc} \cancel{a_1} & b_1 & c_1 & & a_1 & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 & & a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

行列式

注



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 2 S_{\Delta}$$